数理解析研究所講究録
200巻 1974年 79-80

有限群の自己同型と固定点

東大教養　近藤武

P, Martineau は次の定理を証明した.

定理. Gを有限群 AをGの自己同型群の部分群で基本可換群とする。$C_G(A)=1$ならばGは可解である。

こゝでは次の結果が上の定理の簡単な系である事を示す.

定理. Gを有限群 AをGの自己同型群の部分群で基本可換群 Aの位数がpのべきとする。Aの指数pの任意の部分群Vに対して $C_G(V)$がGの巾零な部分群とする。この時Gは可解である。

証明. $|G|$に関する帰納法で証明する。従って次の事を仮定して良い。

(α) GのA不変な真部分群は可解

(β) GのA不変な真の正規部分群をもたない。

Martineauの定理により $C_G(A)\neq 1$ としてよい. $|C_G(A)|$を割る素数qを取る。rを$|G|$を割るqと異なる任意の素数とし, Q, RをそれぞれGのA不変なq-Sylow群, r-Sylow群

とする。このとき

$$R = \langle C_R(V) \mid [A:V] = p \rangle \qquad (*)$$

$C_G(V) \supseteq C_R(V), C_Q(A)$ で $C_G(V)$ は仮定により巾零だから

$$[C_R(V), C_Q(A)] = 1 \qquad (**)$$

(*)により

$$[R, C_Q(A)] = 1$$

帰納法により $C_G(C_Q(A))$ は可解

(**)により $C_G(C_Q(A))$ は G の A-不変な部分群 L で

$G = QL$, $Q \cap L = 1$ なるものを含む。この時

$$\bigcap_{x\in G} Q^x = \bigcap_{y\in L} Q^y$$

(**)により $\bigcap_{y\in L} Q^y \supseteq C_Q(A)$.

$$\therefore \quad G \trianglerighteq \bigcap_{x\in G} Q^x = \bigcap_{y\in L} Q^y \supseteq C_Q(A) \neq 1$$

即ち G は A 不変な真の正規部分群を含む事になり(β)に反す。

(終り)